重み付きグラフ上の枝被覆に対する次数均等化と重み最小化 (理論計算機科学の深化 : 新たな計算世界観を求めて)

原田, 雄太; 小野, 廣隆; 定兼, 邦彦; 山下, 雅史

数理解析研究所講究録
第 1599 巻 2008 年 57-64

重み付きグラフ上の枝被覆に対する次数均等化と重み最小化

原田 雄太 * 小野 廣隆 † 定兼 邦彦 † 山下 雅史 †
* 九州大学大学院システム情報科学府
† 九州大学大学院システム情報科学研究院

1 はじめに

無向グラフ $G=(V,E)$ において全ての頂点が少なくとも 1 つの枝に接続しているような枝の集合は枝被覆と呼ばれる．特に枝数が最小であるような最小枝被覆は多項式時間で得られることが示されており，その構造において各連結成分がスターとなる性質を持つ．枝被覆が成すスター構造はネットワークにおける通信関係を表すなどの応用がある．実際，センサーネットワークにおける情報収集プロトコルの 1 つとしてクラスタリングを用いた手法が提案されており，スターの集合により構成されるような枝被覆はそのクラスタ構造として捉えることができる．センサーネットワークでの情報収集においてエネルギー効率の面で重要なことは各クラスタに属する端末数の均等化と通信距離の最小化である．

そこで本論文では枝被覆に対する次数の均等化と枝重みの最小化を目的とした 2 つの問題について取り組む．第 1 の問題として次数が均等である枝被覆を求める負荷分散枝被覆問題を扱う．次数に対する狭義単調増加凸関数を用いて各頂点のコストを定義し，コストの総和の最小化問題としてこの問題を定式化する．また最適解に対する必要十分条件がある種の交互パスの非存在として特徴付けられることを証明し，多項式時間で終了するいくつかのアルゴリズムを提案する．2 つ目の問題として，上記の問題に枝重みの最小化を条件に追加した最小重み負荷分散枝被覆問題についての結果を示す．この問題に対しても同様に解の最適条件を与え，アルゴリズムの提案を行う．

2 準備

$G=(V,E)$ を頂点集合 V と枝集合 E を持つ単純無向グラフとする．E の各枝は 2 頂点 $u,v\in V$ の対 $\{u,v\}$ で表される．各集合のサイズは $|V|=n$, $|E|=m$ とする．部分集合 $E_s\subseteq E$ と頂点 v に対して，$\delta_{E_s}(v)=\{\{u,v\}\in E_s\}$, $\deg_{E_s}(v)=|\delta_{E_s}(v)|$ とする．$\delta_{E_s}(v)$ は頂点 v と接続している枝の集合，$\deg_{E_s}(v)$ は v の次数である．E に対しては $\deg(v)=\deg_E(v)$ を用いる．部分グラフ (V,E_s) に対して，各頂点 $v\in V$ の次数 $\deg_{E_s}(v)$ を降順に並べた列を E_s に対する**次数列**と呼ぶ．

枝集合 $E_c\subseteq E$ に対して，V の全ての頂点が少なくとも E_c の 1 つの枝と接続しているとき，E_c を枝被覆と呼ぶ．G に孤立点が存在すれば枝被覆は存在しない．したがって，以後 G を孤立点を持たないグラフとする．また枝被覆 E_c に含まれる枝 $e\in E_c$ を**被覆枝**，含まれない枝 $e\notin E_c$ を**非被覆枝**と呼ぶ．枝被覆は Norman らにより研究がなされており，彼らは最大マッチングから最小枝被覆へ，またその逆の変換を行う多項式時間アルゴリズムが存在することを示している [4]．これは以下の命題が成立することを意味する．

命題 1 ([4]) それぞれの最大マッチングはある最小枝被覆に含まれる．また，それぞれの最小枝被覆はある最大マッチングを含む． □

この結果と同様の証明により，Gallai の定理が成り立つことが知られている．即ち $\nu(G)+\rho(G)=n$ が成立する [1]．ここで，$\nu(G)$ と $\rho(G)$ はそれぞれ G における最大マッチングと最小枝被覆の枝数である．実際に，最大マッチング M において，M に被覆されていない各頂点 v に対して v と接続している任意の枝を 1 つ M へ加えることで $O(m)$ 時間で最小枝被覆を得ることができる．したがって，最小枝被覆は最大マッチングアルゴリズムと同等の計算量で求めることができる．最大マッチングを得るアルゴリズムとしては $O(\sqrt{n}m)$ 時間のアルゴリズムが知られている [3]．

枝被覆の極小性についての命題を以下に与える．

命題 2 枝集合 E_c が全域森でありかつ各連結成分がスター (つまり，ある自然数 r に対して $K_{1,r}$) である時またその時に限り E_c は極小枝被覆である． □

$G_s=(V,E_s)$ を各連結成分が全てスターである部分森とする．命題 2 より，E_s はある極小枝被覆 E_c の部分集合である．そのような E_s において，次数 1 の頂点を**葉頂点**，また葉頂点と隣接している頂点を**中心頂点**と呼ぶ．定義より，E_s の各スター $K_{1,r}$ において，$r>1$ のとき次数が 2 以上である頂点が中心頂点，次数 1 の頂点が葉頂点である．$r=1$ の場合，スターには 2 頂点のみ存在し，その両頂点とも中心頂点かつ葉頂点となる．また，E_s のどの枝にも接続しない頂点を**自由頂点**と呼ぶ．中心，葉，自由頂点の各集合を E_s に対してそれぞれ C_{E_s}, L_{E_s}, F_{E_s} とする．極小枝被覆 E_c においては $F_{E_c}=\emptyset$ が満たされる．$L_{E_s}\cup F_{E_s}=V$ のとき，E_s はマッチングである．特に，$L_{E_s}=V$ であれば E_s は完全マッチングとなる．

3 負荷分散枝被覆問題

この節では，枝被覆の各頂点に対する次数の均等化を目的とした負荷分散枝被覆問題 [2] を扱う．

枝被覆の次数均等化を N^+ から R への狭義単調増加凸関数 f (コスト関数として参照) を用いて評価する．枝被覆 E_c とそのような関数 f が与えられたとき，各頂点 $v\in V$ に対するコストを $f(\deg_{E_c}(v))$，目的関数をコストの総和，つまり $c(E_c)=\sum_{v\in V} f(\deg_{E_c}(v))$ と定義する．これは多くの被覆枝がある頂点へ集中するのを避ける傾向を持つ．このとき，負荷分散枝被覆問題は次のように与えられる．

<u>負荷分散枝被覆問題</u>

入力: 単純無向グラフ $G=(V,E)$ と狭義単調増加凸関数 $f:N^+\rightarrow R$,

出力: コストの総和 $c(E_c)=\sum_{v\in V} f(\deg_{E_c}(v))$ が最小となる枝被覆 E_c.

コストの総和 $c(E_c)$ が最小である枝被覆を**負荷分散枝被覆**と呼ぶ．

3.1 最適性

本節では，負荷分散枝被覆の最適性について議論する．最適性はある種のパスにより特徴付けされる．

スターからなる部分森 $G_s=(V,E_s)$ が与えられたとき，異なる枝の列 $P=(\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\},\ldots,\{v_{k-1},v_k\})$ に対して，P の枝が交互に E_s に属していれば，P を E_s に対する**交互パス**と呼ぶ．E_P をパス P に含まれる枝の集合とする．便宜のため，交互パスを頂点の列 $P=(v_1,\ldots,v_k)$ で表す．

集合 A と B の対称差を $A\oplus B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$ と表記する．パス P が枝被覆 E_c に対する交互パスであれば，P に沿って被覆枝と非被覆枝の切り替えを行うことにより新たな枝集合 $E_P\oplus E_c$ が得られる．このとき，頂点 $v_2,\ldots,v_{k-1}$ は切り替え後も被覆を保つ．もし始点 v_1 と終点 v_k が P に存在しない被覆枝か P 上の非被覆枝と接続していれば，$E_P\oplus E_c$ も枝被覆である．

命題 3 枝被覆 E_c とその交互パス $P = (v_1, \ldots, v_k)$ に対して，$\delta_{E_c \oplus E_P}(v_1) \neq \emptyset$ と $\delta_{E_c \oplus E_P}(v_k) \neq \emptyset$ が成立していれば，$E_c \oplus E_P$ も枝被覆である． □

3.1.1 枝最小性

負荷分散枝被覆の定義には明確に枝の最小性は含まれていないが，実際にそれらは最小枝被覆でもある．このことを示すため，最小枝被覆を特徴付ける枝減少パス [4] を導入する．

枝減少パス 枝被覆 E_c に対する交互パス $P = (v_1, v_2, \ldots, v_{2k-1}, v_{2k})$ において，両端の枝 $\{v_1, v_2\}$ と $\{v_{2k-1}, v_{2k}\}$ がそれぞれ $\delta_{E_c \oplus E_P}(v_1) \neq \emptyset$ と $\delta_{E_c \oplus E_P}(v_{2k}) \neq \emptyset$ を満たす被覆枝であれば，P を E_c に対する**枝減少パス** (E_c-枝減少パス) と呼ぶ．枝減少パスは単純パスに限らない．命題3より，そのような枝減少パス P に対して，切り替え後の被覆枝集合 $E_c \oplus E_P$ も枝被覆である．このとき $|E_P \backslash E_c| = |E_P \cap E_c| + 1$ であるので，枝被覆のサイズは1減少する．つまり $|E_P \oplus E_c| = |E_c| - 1$ である．また v_1 と v_{2k} の次数も1減少する．その他の頂点の次数に影響はない．

定理 4 ([4]) 枝被覆 E_c に対する枝減少パスが存在しない時かつその時に限り E_c は最小枝被覆である． □

系 5 ([2]) 負荷分散枝被覆は最小枝被覆である． □

3.1.2 負荷均等性

この節では負荷分散枝被覆の次数均等性に焦点を向ける．まず，切り替えることによりコストの減少を促すようなコスト減少パスの定義を与える．コスト減少パスの定義はコスト関数 f に依存するものではないが，コスト減少パスによりコストの総和 $c(E_c)$ の最小性を特徴付けることが可能である．そして，負荷分散枝被覆の最適性に関する重要な定理を与える．

頂点交互パス $G_s = (V, E_s)$ を各連結成分がスターである部分森とする．E_s に対して，各 i において $c_i \in C_{E_s}$，$l_i \in L_{E_s}$，$\{c_i, l_i\} \in E_s$，$\{l_i, c_{i+1}\} \notin E_s$ を満たすパス $P = (c_1, l_1, \ldots, l_{k-1}, c_k)$ を**頂点交互パス** (E_s-頂点交互パス) と定義する．つまり，P は中心頂点と葉頂点を交互にたどる交互パスである．頂点交互パスの切り替えによる枝数の変化はない．最小枝被覆 E_c において，$\delta_{E_c \oplus E_P}(c_1) = \emptyset$ を満たしていれば，命題3より切り替え後の $E_c \oplus E_P$ も最小枝被覆である．

コスト減少パス E_s に対する頂点交互パス $P = (c_1, \ldots, c_k)$ において，$\deg_{E_s}(c_1) > \deg_{E_s}(c_k) + 1$ を満たすならば，P を**コスト減少パス**(E_s-コスト減少パス) と呼ぶ．文字通り，コスト減少パス P に沿って枝の切り替えを行うとコストの総和が減少する．つまり，$c(E_P \oplus E_s) < c(E_s)$．コスト減少パスの定義は関数 f に依存するものではないが，任意の狭義単調増加凸関数 f に対して $c(E_P \oplus E_s) < c(E_s)$ が成立することを示す．パスの切り替え操作 $E_P \oplus E_s$ により次数が変わる頂点は c_1 と c_k のみである．簡単のため，$\deg_{E_s}(c_1)$ と $\deg_{E_s}(c_k)$ をそれぞれ d_1, d_k と表記する．このとき，$\deg_{E_P \oplus E_s}(c_1) = \deg_{E_s}(c_1) - 1 = d_1 - 1$ と $\deg_{E_P \oplus E_s}(c_k) = \deg_{E_s}(c_k) + 1 = d_k + 1$，コスト減少パスの条件である $d_1 > d_k + 1$ を満たす．f の狭義凸性により，

$$\frac{1}{d_1 - d_k} f(d_1) + \left(1 - \frac{1}{d_1 - d_k}\right) f(d_k) > f(d_k + 1),$$
$$\left(1 - \frac{1}{d_1 - d_k}\right) f(d_1) + \frac{1}{d_1 - d_k} f(d_k) > f(d_1 - 1)$$

が得られる．したがって，上記2式の和から

$$\begin{aligned} & c(E_s) - c(E_P \oplus E_s) \\ = \; & f(d_1) + f(d_k) - (f(d_1 - 1) + f(d_k + 1)) \\ > \; & 0 \end{aligned} \tag{1}$$

が得られる．つまり，コスト減少パスに対する切り替え操作はコストの総和を減少させる．

定理 6 ([2]) 枝被覆 E_c に対して，以下の $(a) \sim (c)$ は等価である．

(*a*) 任意の f に対して E_c は負荷分散枝被覆である.

(*b*) E_c は最小枝被覆であり，かつ E_c に対するコスト減少パスは存在しない.

(*c*) E_c に対する次数列の辞書順が全ての枝被覆の中で最小である. □

定理6の (*a*) と (*c*) の等価により，以下の系が成立する.

系 7 ([2]) E_c が負荷分散枝被覆であれば，最大次数 $\max_{v \in V}\{\deg_{E_c}(v)\}$ は最小である. □

3.2 提案アルゴリズム

提案アルゴリズムとして $BEC2$ を紹介する. $BEC2$ は次数の均等を保ちつつ，つまりコスト減少パスが存在しない状況を保ちながら，最大マッチングを負荷分散枝被覆へ拡張していく手法である. アルゴリズムの手順を以下に示す.

アルゴリズム $BEC2$:

Step 1: 最大マッチング M を求める.

Step 2: $F_M \neq \emptyset$ であれば，自由頂点 $v_1 \in F_M$ を任意に選択する. そうでなければ，M を返す.

Step 3: T 上で次数 $\deg_M(v_{2k})$ が最小となる頂点 $v_{2k} \in C_M$ への交互パス $P = (v_1, \ldots, v_{2k})$ を探索する. そのようなパス P を **M-増加パス**と呼ぶ.

Step 4: 増加パス P の切り替えにより M を拡張し，Step 2 へ.

以下にアルゴリズムの正当性を保証する補題を与える.

補題 8 ([2]) $BEC2$ の実行中にコスト減少パスが現れることはない. □

定理 9 ([2]) $BEC2$ により $O(nm)$ 時間の計算量で負荷分散枝被覆が得られる. □

4 最小重み負荷分散枝被覆問題

前節で扱った負荷分散枝被覆問題に枝重みの条件を考慮した問題を本節で扱う. 各枝に対する重みを $w : E \rightarrow R^+$ とし，負荷分散枝被覆の中で枝重みの合計が最も小さな枝被覆を求めることを考える.

最小重み負荷分散枝被覆問題

入力: 単純無向グラフ $G = (V, E)$，重み関数 $w : E \rightarrow R^+$，狭義単調増加凸関数 $f : N^+ \rightarrow R$,

出力: 重みの総和 $w(E_c) = \sum_{e \in E_c} w(e)$ が最小となる負荷分散枝被覆 E_c.

重みの総和 $w(E_c)$ が最小な負荷分散枝被覆 E_c を**最小重み負荷分散枝被覆**と呼ぶ.

4.1 最適性

ここでは最小重み負荷分散枝被覆の必要十分条件について述べる. まずその準備として，交互パスに関する定義をいくつか与える.

重み増加量　$E_s \subseteq E$ に対する交互パス P に対して，重み増加量を

$$w_P = \sum_{e \in E_P \setminus E_s} w(e) - \sum_{e \in E_P \cap E_s} w(e)$$

と定義する. w_P は交互パス P を切り替えたときの重みの総和の増加量を表す. つまり，以下の式が成立する.

$$w(E_P \oplus E_s) = w(E_s) + w_P. \qquad (2)$$

コスト保存パス・閉路　最小枝被覆の部分集合 E_s に対する頂点交互パス $P = (v_1, \ldots, v_{2k+1})$ において $\deg_{E_s}(v_1) = \deg_{E_s}(v_{2k+1}) + 1$ を満たすとき，パス P を**コスト保存パス**と呼ぶ. 一方，$v_1 = v_{2k+1}$ を満たす頂点交互パス $P = (v_1, \ldots, v_{2k+1})$ を**コスト保存閉路**と呼ぶ.

コスト保存パス・閉路 P に沿って枝の切り替えを行っても，コストの総和に影響しない. つま

り $c(E_s) = c(E_P \oplus E_s)$ を満たす．$\deg_{E_s}(v_1) = \deg_{E_s}(v_{2k+1}) + 1$ の場合は式 (1) に対して等式が成立することから，$c(E_s)$ の値が変わらないことは明らかである．$v_1 = v_{2k+1}$ のときは，P が閉路であることからすべての $v \in V$ で $\deg_{E_P \oplus E_s}(v) = \deg_{E_s}(v)$ が成り立ち，$c(E_s)$ の値は保存される．

重み減少パス・閉路 E_s に対するコスト保存パス・閉路 P が負の重み増加量 $w_P < 0$ を持つとき，P をそれぞれ**重み減少パス**，**重み減少閉路**と呼ぶ．

重み減少パス・閉路 P に対する枝の切り替え操作に対して，コストの総和 $c(E_s)$ には影響を与えないが，より重みの総和が小さな枝集合 $E_P \oplus E_s$ が得られる．つまり $w(E_P \oplus E_s) < w(E_s)$ が満たされる．これは上記の式 (2) からも明らかである．

定理 10 負荷分散枝被覆 E_c において，重み減少パスと重み減少閉路が存在しない時かつその時に限り，E_c は最小重み負荷分散枝被覆である．
□

4.2 提案アルゴリズム

最小重み負荷分散枝被覆を求めるアルゴリズム WEC を提案する．アルゴリズムの手順は前節で紹介した $BEC2$ が基本となっているが，探索する増加パスに対して重みの条件をさらに追加している．

<u>**Algorithm** WEC**:**</u>

Step 1: 最小重みの最大マッチング M を求める．

Step 2: $F_M \neq \emptyset$ であれば，自由頂点 $v_1 \in F_M$ を 1 つ選択する．そうでなければ M を出力する．

Step 3: Find-Augmenting-Path (後述) により，v_1 を始点とする重み増加量が最小な増加パス P を探索する．

Step 4: $M := M \oplus E_P$ とし，Step 2 へ．

補題 11 アルゴリズム WEC の実行中に，M に対する重み減少パスと重み減少閉路は存在しない．

証明 背理法により示す．アルゴリズムの各反復において構築される被覆枝集合を順番に $M_0, M_1, \ldots, M_{|F_{M_0}|}$ とする．M_0 は Step 1 で得られる最小重みの最大マッチングであり，明らかに M_0 に対する重み減少パス・閉路は存在しない．ここで，i 番目の被覆枝集合 M_i に対して初めて重み減少パス・閉路 $P^* = (v_1, \ldots, v_{2k+1})$ が現れると仮定する．また，直前の被覆枝集合 M_{i-1} において探索される増加パスを $P' = (v', \ldots, c')$ とする．$M_i = M_{i-1} \oplus E_{P'}$ である．M_{i-1} に対して P^* は重み減少パス・閉路ではなく，増加パス P' を切り替えることにより P^* は M_i に対する重み減少パス・閉路となる．2 つのパス P_1 と P_2 に共に含まれる極大な部分パスの集合を $\mathcal{P}(P_1, P_2)$ で表す．$\mathcal{P}(P^*, P')$ の各パスを P^* に対して早く現れる順番に $Q_1, \ldots, Q_l$ とする．また $V_Q = \bigcup_j V_{Q_j}$, $E_Q = \bigcup_j E_{Q_j}$, $Q = (V_Q, E_Q)$ とする．このような状況において，M_{i-1} に対する増加パス P' の選び方に矛盾が起こること，つまり重み増加量が $w_{P'}$ より小さな増加パスの存在を示す．今後，M_i に対する交互パス P の重み増加量を $w_P^{(i)}$ と表記する．

増加パス P' は必ず $Q_1, \ldots, Q_l$ をすべてたどり，$M_i = M_{i-1} \oplus E_{P'}$ より $j = 1, \ldots, l$ に対して $w_{Q_j}^{(i)} = -w_{Q_j}^{(i-1)}$ である．このとき P' が各 Q_j を一度にたどると仮定しても一般性を失わない．もし P' がある Q_j を数回に分けてたどる場合，例えば l' 回でたどる場合は Q_j を $Q_j^{(1)}, \ldots, Q_j^{(l')}$ に分割して考えればよい．一方，$E_{P^*} \oplus E_{P'}$ の枝から誘導されるグラフ G' の各連結成分はパスか閉路となり，存在するパスの始点と終点は v_1, v_{2k+1}, v', c' の組合せとなる．$v' \in F_{M_{i-1}}$ より v' を端点とするパスは必ず存在し，そのもう一方の端点は c', v_1, v_{2k+1} の 3 通りである．

Case 1. G' の連結成分として v' から c' あるいは v_{2k+1} へのパス P_1 が存在する場合．まず，P' と P_1 は終点の次数が最小である増加パスであること，つまり $\{P', P_1\} \subseteq \mathcal{P}_{v'}$ を示す．

P_1 の終点が c' のときは P' と終点が一致するので $\{P', P_1\} \subseteq \mathcal{P}_{v'}$ であることは明らかである．よって v_{2k+1} が P_1 の終点となる場合を考える．もし $v_{2k+1} = c'$ ならば，同様に P_1 と P' が同じ終点を持つので $\{P', P_1\} \subseteq \mathcal{P}_{v'}$ が成立する．$v_1 = v_{2k+1}$ であるとすると，G' の連結成分として v'-c'-パスが存在することになり，上記の場合に含まれる．よって $v_1 \neq v_{2k+1}$ とすると，P^* は M_i に対するコスト保存 (重み減少) パスとなることから $\deg_{M_i}(v_1) \leq \deg_{M_i}(v_{2k+1}) + 1$ が満たされる．このとき $v_1 = c'$ であるならば，c' に対して $\deg_{M_i}(c') = \deg_{M_{i-1}}(c') + 1$ が成り立ち，直前の不等式を考慮すると $\deg_{M_{i-1}}(c') \leq \deg_{M_{i-1}}(v_{2k+1})$ が得られる．もし等号が成立しなければ，P' よりも P_1 の方が終点の次数が小さくなる．しかしこれは P' の選択に反することから等号を満たし，$\{P', P_1\} \subseteq \mathcal{P}_{v'}$ となる．

G' の連結成分において v' を始点とするパスが P_1 であり，(存在するならば) v_1 から始まるパスを P_2 とする．その他の連結成分はすべて閉路であり，それらを $P_3, \ldots, P_r$ とする．P_1 は $\mathcal{P}(P_1, P^*)$ のパスと $\mathcal{P}(P_1, P')$ のパスの結合により構成されるパスであるので，

$$w_{P_1}^{(i-1)} = \sum_{P \in \mathcal{P}(P_1, P^*)} w_P^{(i-1)} + \sum_{P \in \mathcal{P}(P_1, P')} w_P^{(i-1)} \tag{3}$$

である．P_2 は $\mathcal{P}(P_2, P^*)$ と $\mathcal{P}(P_2, P')$ から成るパスであり，M_{i-1} に対する重み減少パスは存在しないことから $w_{P_2}^{(i-1)} \geq 0$ である．加えて $P_3, \ldots, P_r$ の各 P_j は閉路であり，$\mathcal{P}(P_j, P^*)$ と $\mathcal{P}(P_j, P')$ のパスにより構成される．M_{i-1} に対する重み減少閉路も存在しないことから $w_{P_j}^{(i-1)} \geq 0$ が同様に満たされる．よって $j = 2, \ldots, r$ に対して

$$w_{P_j}^{(i-1)} = \sum_{P \in \mathcal{P}(P_j, P^*)} w_P^{(i-1)} + \sum_{P \in \mathcal{P}(P_j, P')} w_P^{(i-1)} \geq 0 \tag{4}$$

が成立する．一方 P^* は $\bigcup_{j=1}^{r} \mathcal{P}(P_j, P^*)$ と $\mathcal{P}(P^*, P')$ のパス集合から構成され，$w_{P^*}^{(i)} < 0$ かつ $j = 1, \ldots, l$ の各 $Q_j \in \mathcal{P}(P^*, P')$ に対して $w_{Q_j}^{(i)} = -w_{Q_j}^{(i-1)}$ であるので，以下の不等式が満たされる．

$$\begin{aligned} w_{P^*}^{(i)} &= \sum_{j=1}^{r} \{ \sum_{P \in \mathcal{P}(P_j, P^*)} w_P^{(i)} \} + \sum_{P \in \mathcal{P}(P^*, P')} w_P^{(i)} \\ &= \sum_{j=1}^{r} \{ \sum_{P \in \mathcal{P}(P_j, P^*)} w_P^{(i-1)} \} - \sum_{P \in \mathcal{P}(P^*, P')} w_P^{(i-1)} \\ &< 0. \end{aligned} \tag{5}$$

上記の $j = 2, \ldots, r$ に対する式 (4) と式 (5) の和により

$$\begin{aligned} &\sum_{P \in \mathcal{P}(P_1, P^*)} w_P^{(i-1)} \\ &< \sum_{P \in \mathcal{P}(P^*, P')} w_P^{(i-1)} + \sum_{j=2}^{r} \{ \sum_{P \in \mathcal{P}(P_j, P')} w_P^{(i-1)} \} \end{aligned}$$

が成立する．両辺に $\sum_{P \in \mathcal{P}(P_1, P')} w_P^{(i-1)}$ を加えると

$$\begin{aligned} &\sum_{P \in \mathcal{P}(P_1, P^*)} w_P^{(i-1)} + \sum_{P \in \mathcal{P}(P_1, P')} w_P^{(i-1)} \\ &< \sum_{P \in \mathcal{P}(P^*, P')} w_P^{(i-1)} + \sum_{j=1}^{r} \{ \sum_{P \in \mathcal{P}(P_j, P')} w_P^{(i-1)} \} \end{aligned}$$

となる．式 (3) より左辺は $w_{P_1}^{(i-1)}$ と等しく，また右辺は $w_{P'}^{(i-1)}$ と等しいことから，最終的に $w_{P_1}^{(i-1)} < w_{P'}^{(i-1)}$ が満たされる．これは P' に対する重み増加量の最小性に矛盾する．

Case 2. 次に v' から v_1 へのパス P_1 が G' の連結成分として存在する場合を考える．P^* が閉路であれば，G' に v'-c'-パスが存在するので Case 1 に相当する．よって P^* は (コスト保存) パスであり，$\deg_{M_i}(v_1) \geq 2$ を満たす．このことから，P_1 を切り替えて得られる被覆枝集合 $M_{i-1} \oplus E_{P_1}$ に対して $\deg_{M_{i-1} \oplus E_{P_1}}(v_1) = \deg_{M_{i-1}}(v_1) - 1 \geq 1$ が満たされ，v_1 の被覆は保たれるが，スターの数が $\nu(G) + 1$ へ増加する．これは M_{i-1} に最大マッチングが含まれることに反する．

Case 1 と 2 より M_i に対する重み減少パスは生成されず，WEC により得られる枝被覆は最適である．□

定理11により，WEC のStep 3で条件を満たす増加パスを探索できれば，最適な枝被覆が出力される．残る問題は増加パスの探索であり，探索アルゴリズムとしてFIND-AUGMENTING-PATHを提案する．アルゴリズムでは以下の花の概念を用いる．

M に対する交互パス $P = (v_1, \ldots, v_{2q})$ において，すべての $1 \le i < j \le 2q-1$ で $v_i \ne v_j$，$v_1 \in F_M$，ある $2p+1 < 2q$ で $v_{2p+1} = v_{2q}$ を満たすとき，P を**花パス**と呼ぶ．また花パス P 上の閉路 $(v_{2p+1}, \ldots, v_{2q})$ は**花**と呼び，頂点 $v_{2p+1}(= v_{2q})$ を花の**基点**という．

補題 12 M を最小枝被覆の部分集合で，最大マッチングを含むものとする．花に含まれる頂点の M に対する次数はすべて1である．

証明 $P = (v_1, \ldots, v_{2q})$ を M に対する花パスとする．もし $v_{2i+1} \notin L_M$ を満たす i が存在すれば，P の部分パス $P[v_1, v_{2i+1}]$ を切り替えることでスターの数が1増加する．これは M が最大マッチングを含むことに反する．よって，すべての i で $v_{2i+1} \in L_M$ である．花は両回り可能であることを考えると，花のすべての頂点は葉頂点となる． □

FIND-AUGMENTING-PATH:

Step 0: $\Omega = \emptyset$, $w_{P_{\min}} = \infty$ とする．

Step 1: Ω の各頂点集合を縮約したグラフを $G_\Omega = (V_\Omega, E_\Omega)$ とする．

Step 2: G_Ω から重み $w_\Omega : A_1 \cup A_2 \to R$ を持つ有向グラフ $D = (V_\Omega, A_1 \cup A_2)$ を構築する(後述)．

Step 3: G において $v_1 \in F_{E_c}$ から増加パスによって到達可能な頂点の中で次数が最小である頂点の集合を $V_{\min} \subseteq C_M$ とする．$V_{\min}$ の頂点を終点とする辺の重複を許す交互パスの中で重み増加量が最小な交互パス $P = (v_1, \ldots, v_{2k})$ を求める．D, w_Ω に対してMoore-Bellman-Fordアルゴリズムを実行し，v_1 から各頂点への最短パスを求めればよい．

Step 4: P の部分パスで枝の重複がない極大なパスを $P' = (v_1, \ldots, v_{2q})$ とする．もし P' が花 $P_f = (v_{2p+1}, \ldots, v_{2q})$ を含む花パスであれば，その花の頂点集合 V_{P_f} を Ω に追加する．また P' の部分パスで重み増加量が最小となる v_1-v_{2j}-パスを P^* とする．もし $w_{P^*} < w_{P_{\min}}$ であれば $P_{\min} = P^*$ としてStep 1へ．P' が単純パスである場合 $(P' = P)$ は,P' と $P_{\min}$ で重み増加量が小さい方を出力する．

補題 13 G_Ω 上の M-増加パスの中に，G 上の重み増加量が最小な M-増加パスに相当するパスが存在する．

証明 G 上のいくつかの増加パスは G_Ω 上では交互パスでなくなる．それは花の出入りで共に被覆枝もしくは非被覆枝をたどるようなパスである．被覆枝をたどる場合，補題12から花の縮約後の頂点の M に対する次数は1であり，花の入出において同じ被覆枝をたどる．これは枝を重複するパスとなるので増加パスではない．次に非被覆枝をたどる場合を考える．縮約される花はStep 4における花 P_f であり，これはStep 3で探索される重み増加量が最小なパス P に含まれる．よって花から非被覆枝をたどって出るまでに最短となるパスは P の部分パスとなる．P は被覆枝により花へ入るパスであることから，花の入出で共に非被覆枝をたどるようなパスは最短パスとは成り得ない． □

上記の補題13において G 上の増加パスは G_Ω でも探索可能であることを示した．残る問題は G_Ω に対して G 上の重み増加量が最小な増加パスをどのように探索するかであり，これはStep 2における有向グラフ D の構築と，D に対する最短パスアルゴリズムの適用により行われている．以下に有向グラフ D の構築手順を示す．

CONSTRUCT-DIGRAPH:

Step 2 G_Ω から以下のように重み w_Ω : $A_1 \cup A_2 \to R$ を持つ有向グラフ $D = (V_\Omega, A_1 \cup A_2)$ を構築する．

Step 2a: $A_1 = \{(v,u) | \{v,u\} \in E_\Omega \setminus E_c, v \in F_{E_c}\}$ とする．また A_1 の各枝に対して u の縮約前の頂点集合を U とする．$U \in \Omega$ ($|U|>1$) であれば，U からなる花を P_u とし，P_u の基点を u^*，v と結ばれている U の頂点を u'，それらを結ぶ P_u の偶数本の部分パスを $P_u[u',u^*]$ とする．$U \notin \Omega$ ($|U|=1$) のときは $u^* = u' \in U$ とする．このとき，A_1 の各枝 (v,u) に対して $w_\Omega((v,u)) = w(\{v,u'\}) + w_{P_u[u',u^*]}$ と重みを付ける．

Step 2b: $A_2 = \{(v,u) | ^\exists x \in L_{E_c} : \{v,x\} \in E_\Omega \cap E_c, \{x,u\} \in E_\Omega \setminus E_c, u,v \in C_{E_c}\}$ とする．x と u の縮約前の頂点集合をそれぞれ X,U とし，X,U からなる花を P_x,P_u とする．P_x,P_u の基点を $x^* \in X, u^* \in U$，$\{x,u\} \in E_\Omega$ に対応する G 上の枝の端点を $x' \in X, u' \in U$ とする．また $P_x[x^*,x']$ と $P_u[u',u^*]$ をそれぞれの偶数本の部分パスとする．($X \notin \Omega$ のときは $x^* = x' \in X$．U も同様．) このとき，各 $(v,u) \in A_2$ の重みを $w_\Omega((v,u)) = -w(\{v,x\}) + w_{P_x[x^*,x']} + w(\{x,u\}) + w_{P_u[u',u^*]}$ とする．

補題 14 FIND-AUGMENTING-PATH により，$O(n^2m)$ 時間で重み増加量が最小な増加パスが得られる．

証明 アルゴリズムは主に重み増加量が最小な交互パス P(枝の重複を許す) の探索と P に含まれる花の縮約の反復からなる．花の縮約を繰り返すことにより，最終的に (枝の重複を持たない) 増加パスが得られる．パス探索は G_Ω 上で実行でき (∵ 補題13)，最短パスアルゴリズムを用いるため，さらに有向グラフ D へ変換している．

G_Ω から有向グラフ D の構築手順は CONSTRUCT-DIGRAPH で与えている．D では被覆枝と非被覆枝のペアで有向枝を構成しており，D における任意のパスは G 上の M-交互パスに相当する．また両パスの重み増加量も等しくなるように D の各有向枝に対して重みを定義している．しかし D では Ω の花に含まれる頂点を終点とする増加パスの探索ができなくなる．そこで，アルゴリズムでは Step 4 において重み増加量が最小な花パスの部分パスを $P_{\min}$ として保持することで対応している．

続いて計算量を与える．Step 3 における Moore-Bellman-Ford アルゴリズムの計算量は $O(nm)$ 時間であり，反復回数は高々n 回 (花の数の上限) である．よって全体の計算時間は $O(n^2m)$ 時間となる． □

定理 15 WEC により $O(n^3m)$ 時間で最小重み負荷分散枝被覆が得られる．

証明 補題 11 と 14 より，WEC は最小重み負荷分散枝被覆を出力する．計算時間は FIND-AUGMENTING-PATH が $O(n^2m)$ 時間であり，WEC の反復回数は自由頂点の数と等しく高々 n 回である．したがって WEC の計算時間は合計で $O(n^3m)$ 時間である． □

参考文献

[1] T. Gallai,Über Extreme Punkt- und Kantenmengen, Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae, Sectio Mathematica 2, pp. 133–138, 1959.

[2] Y. Harada, H. Ono, K. Sadakane and M. Yamashita, Optimality and Algorithms for the Balanced Edge Cover Problem, COMP, vol.107, no.73, pp. 43–50, 2007.

[3] S. Micali and V.V. Vazirani, An $O(V^{1/2}E)$ algorithm for finding maximum matching in general graphs, Proceedings of the 21st Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, pp. 12–27, 1980.

[4] R.Z. Norman and M.O. Rabin, An algorithm for a minimum cover of a graph, Proceedings of the American Mathematical Society, 10:315–319, 1959.